Introdução à Topologia – Resoluções de exercícios

Capítulo 1

Exercício nº5 (alíneas 3. e 4.)

É imediato, directamente a partir da definição, que, dados $r, s \in \mathbb{Q}$, $d_p(r,s) \geqslant 0$ e que $d_p(r,s) = 0$ se e só se $r = s$. Para demonstrar que $d_p(r,s) = d_p(s,r)$, observe-se que esta igualdade é trivial se $r = s$; caso contrário, se se escrever:

$$r - s = p^{\nu_p(r-s)} \cdot \frac{a}{b}$$

com $(a,p) = (b,p) = 1$, então tem-se:

$$s - r = p^{\nu_p(r-s)} \cdot \frac{-a}{b}$$

e $(-a,p) = (b,p) = 1$. Sendo assim, é claro que $\nu_p(s-r) = \nu_p(r-s)$ e, portanto, que $d_p(r,s) = d_p(s,r)$. Finalmente, pretende-se demonstrar que se $t \in \mathbb{Q}$, então

$$d_p(r,t) \leqslant \max\{d_p(r,s), d_p(s,t)\}. \tag{1}$$

Antes de se passar à demonstração desta afirmação, observe-se que ela implica que se tem $d_p(r,t) \leqslant d_p(r,s) + d_p(s,t)$. Por outro lado, ao demonstrar-se (1), pode-se supor que r, s e t são distintos dois a dois. De facto, se $r = t$, então (1) reduz-se a $0 \leqslant \max\{d_p(r,s), d_p(s,t)\}$ e se $r = s$ ou $s = t$, então (1) reduz-se a $d_p(r,t) \leqslant d_p(r,t)$. Será então suposto que r, s e t são dois a dois distintos; pretende-se provar que

$$|r-t|_p \leqslant \max\{|r-s|_p, |s-t|_p\},$$

ou seja, mostrar que

$$\nu_p(r-t) \geqslant \min\{\nu_p(r-s), \nu_p(s-t)\}.$$

Sejam $\alpha = r - s$ e $\beta = s - t$. Com esta notação, pretende-se mostrar que $\nu_p(\alpha+\beta) \geqslant \min\{\nu_p(\alpha), \nu_p(\beta)\}$. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ números primos com p tais que:

$$\alpha = p^{\nu_p(r-s)} \cdot \frac{a}{b} \text{ e } \beta = p^{\nu_p(s-t)} \cdot \frac{c}{d}.$$

Vai-se supor que $\nu_p(\alpha) \leqslant \nu_p(\beta)$; a demonstração é análoga se $\nu_p(\alpha) \geqslant \nu_p(\beta)$. Tem-se então:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= p^{\nu_p(\alpha)} \cdot \frac{a}{b} + p^{\nu_p(\beta)} \cdot \frac{c}{d} \\ &= p^{\nu_p(\alpha)} \frac{a + p^{\nu_p(\beta)-\nu_p(\alpha)}c}{b.d}. \end{aligned} \tag{2}$$

Sejam $n \in \mathbb{Z}_+$ e $e \in \mathbb{Z}$ tais que $(e, p) = 1$ e que

$$a + p^{\nu_p(\beta)-\nu_p(\alpha)}c = p^n.e; \tag{3}$$

seja $f = b.d$. Então $(f, p) = 1$ e deduz-se de (2) e de (3) que:

$$\alpha + \beta = p^{\nu_p(\alpha)+n} \cdot \frac{e}{f};$$

logo, $\nu_p(\alpha+\beta) = \nu_p(\alpha)+n = \min\{\nu_p(\alpha), \nu_p(\beta)\}+n \geqslant \min\{\nu_p(\alpha), \nu_p(\beta)\}$.

Exercício nº9

Sejam $x, y \in E$; pretende-se mostrar que $d(x, y) \geqslant 0$. Basta observar que $0 = d(x, x) \leqslant d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$.

Exercício nº18

1. A função não é contínua; de facto, vai ser visto que é descontínua em todos os pontos do domínio. Seja $f \in \mathcal{C}([0, 1])$; pretende-se demonstrar que:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists g \in \mathcal{C}([0, 1])) : d_1(f, g) < \delta \text{ e } |f(0) - g(0)| \geqslant \varepsilon.$$

Seja $\varepsilon = 1$ e seja $\delta > 0$. Se se encontrar uma função $h \in \mathcal{C}([0, 1])$ tal que

$$\int_0^1 |h| \,(= d_1(h, 0)) < \delta$$

e que $|h(0)| \geqslant 1$, então a função $g = f + h$ será claramente tal que $d_1(f, g) < \delta$ e que $|f(0) - g(0)| \geqslant 1$. Basta escolher h com um gráfico como o da figura 1. Mais precisamente, considere-se:

$$h(t) = \begin{cases} 1 - t/d & \text{se } t < d \\ 0 & \text{se } t \geqslant d. \end{cases}$$

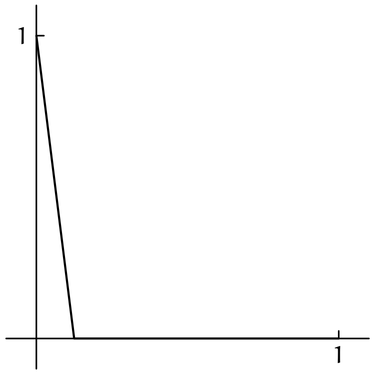

Figura 1

com $d \in]0,1]$. Então $h(0) = 1$ e $\displaystyle\int_0^1 |h| = d/2$. Basta então escolher d tal que $d/2 < \delta$.

2. Sim, a função é contínua e é mesmo uniformemente contínua, ou seja, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ existe algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall f, g \in \mathcal{C}([0,1])) : d_\infty(f,g) < \delta \Longrightarrow |f(0) - g(0)| < \varepsilon.$$

Com efeito, basta tomar $\delta = \varepsilon$, pois se $d_\infty(f,g) < \varepsilon$ então

$$|f(0) - g(0)| \leqslant \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| = d_\infty(f,g) < \varepsilon.$$

Exercício nº21

1. Afirmar que a função é descontínua em todos os pontos do domínio equivale a afirmar que:

$$(\forall r \in \mathbb{Q})(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists r' \in \mathbb{Q}) : d_p(r, r') < \varepsilon \text{ e } d(r, r') \geqslant \varepsilon.$$

Sejam então $r \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon = 1$ e $\delta > 0$; pretende-se encontrar um número racional r' tal que $d_p(r, r') < \delta$ e $|r - r'| \geqslant 1$. Para tal basta encontrar um número racional h tal que $|h|_p (= d_p(h, 0)) < \delta$ e $|h| \geqslant 1$; uma vez encontrado um tal h, bastará considerar $r' = r + h$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $p^{-n} < \delta$. Então $|p^n|_p = p^{-n} < \delta$ (por escolha de n) e $|p^n| = p^n \geqslant 1$.

2. Sim; basta considerar a função que envia $r (\in \mathbb{Q})$ em $|r|_p$. Que esta função é contínua é uma consequência imediata do exercício 14, pois, para cada $r \in \mathbb{Q}$, $|r|_p = d_p(r, 0)$.

Exercício nº25

Que as aplicações $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ da forma $f(z) = \omega z + \beta$ ou $f(z) = \omega\overline{z} + \beta$, em que $\omega, \beta \in \mathbb{C}$ e $|\omega| = 1$, são isometrias é óbvio; o problema consiste em saber se há ou não outras isometrias. De facto não há. Para demonstrar esta afirmação, seja $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma isometria; sejam $\beta = f(0)$ e $\omega = f(1) - f(0)$. É claro que $|\omega| = 1$, pois $|\omega| = |f(1) - f(0)| = |1 - 0| = 1$. Seja

$$\begin{array}{rccc} g\colon & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \rightsquigarrow & (f(z) - \beta)/\omega; \end{array}$$

é claro que g é uma isometria, que $g(0) = 0$ e que $g(1) = 1$. Pretende-se demonstrar que g é a identidade ou a conjugação; no primeiro caso ter-se-á então que, para qualquer $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \omega z + \beta$ e no segundo caso ter-se-á, para qualquer $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \omega\overline{z} + \beta$.

Primeira resolução: Vai-se começar por mostrar que:

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : g(z) = z \text{ ou } g(z) = \overline{z}.$$

Seja então $z \in \mathbb{C}$ e seja $w = g(z)$. Sabe-se que $|w| = |z|$ e que $|w - 1| = |g(z) - g(1)| = |z - 1|$. Mas também se sabe que:

$$\begin{aligned} |z-1|^2 = |w-1|^2 &\iff |z|^2 - 2\operatorname{Re} z + 1 = |w|^2 - 2\operatorname{Re} w + 1 \\ &\implies \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w \end{aligned}$$

pois $|z| = |w|$. Logo, tem-se:

$$(\operatorname{Im} z)^2 = |z|^2 - (\operatorname{Re} z)^2 = |w|^2 - (\operatorname{Re} w)^2 = (\operatorname{Im} w)^2$$

e, portanto, $\operatorname{Im} z = \pm \operatorname{Im} w$; logo, $z = w$ ou $z = \overline{w}$.

Falta mostrar que se tem sempre $g(z) = z$ ou se tem sempre $g(z) = \overline{z}$. Suponha-se, por redução ao absurdo, que existe algum $z \in \mathbb{C}$ tal que $g(z) = z \neq \overline{z}$ e que existe algum $w \in \mathbb{C}$ tal que $g(w) = \overline{w} \neq w$. Então $|z - \overline{w}| = |g(z) - g(w)| = |z - w|$. Mas tem-se

$$\begin{aligned} |z - \overline{w}| = |z - w| &\iff (\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w)^2 = \\ &\qquad = (\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} w)^2 \\ &\iff \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w = \pm(\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} w) \\ &\iff \operatorname{Im} z = 0 \text{ ou } \operatorname{Im} w = 0 \\ &\iff z = \overline{z} \text{ ou } w = \overline{w} \end{aligned}$$

o que é absurdo.

Segunda resolução: Tem-se

$$|g(i)| = |g(i) - g(0)| = |i - 0| = 1$$

e

$$|g(i) - 1| = |g(i) - g(1)| = |i - 1| = \sqrt{2},$$

pelo que $g(i)$ está na intersecção das circunferências $S(0, 1)$ e $S(1, \sqrt{2})$; logo, $g(i) = \pm i$.

Suponha-se que $g(i) = i$; pretende-se demonstrar que g é então a identidade. Seja $z \in \mathbb{C}$. Sabe-se que $|g(z)| = |z|$, que $|g(z) - 1| = |z - 1|$ e que $|g(z) - i| = |z - i|$, ou seja que $g(z)$ esta situado simultaneamente nas três circunferências de centros 0, 1 e i e de raios respectivamente $|z|$, $|z - 1|$ e $|z - i|$. Mas três circunferências com centros não colineares só possuem, no máximo, um ponto comum e z pertence a cada uma delas; logo $g(z) = z$.

Se $g(i) = -i$, define-se, para cada $z \in \mathbb{C}$, $\hat{g}(z) = \overline{g(z)}$. A função $\hat{g}$ é uma isometria, $\hat{g}(0) = 0$, $\hat{g}(1) = 1$ e $\hat{g}(i) = i$. Como já foi visto, $\hat{g}$ é a função identidade, pelo que g é a conjugação.

Exercício nº28

Se I for um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e se $a \in I$, existem $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $]a - r_1, a + r_2[\subset I$. Se $r = \min\{r_1, r_2\}$, então $]a - r, a + r[\subset I$. Mas $]a - r, a + r[= B(a, r)$. Está então provado que

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists r \in \mathbb{R}_+^*) : B(a, r) \subset I,$$

ou seja, que I é um aberto.

Exercício nº31.1 (métrica p-ádica)

O conjunto em questão não é nem aberto nem fechado em $\mathbb{Q}$ relativamente à métrica p-ádica. Para ver que não é aberto, observe-se que se $\varepsilon > 0$, então a bola $B(0, \varepsilon)$ não está contida em $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$; de facto, se $n \in \mathbb{N}$ for tal que $p^{-n} < \varepsilon$, então $p^n \in B(0, \varepsilon)$ mas $p^n \notin [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Para ver que $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ não é fechado em $\mathbb{Q}$ será demonstrado que nenhuma bola aberta $B(r, \varepsilon)$ com $r \in \mathbb{Q}$ e $\varepsilon > 0$ está contida no complementar de $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Sejam $k, a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $r = p^k \frac{a}{b}$ e que $(a, p) = (b, p) = 1$. Se se tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $p^{-n-k} < \varepsilon$, então $r - r\frac{p^n}{p^n - 1} \in B(r, \varepsilon)$; basta então escolher n tal que $\left|r - r\frac{p^n}{p^n - 1}\right| \leqslant 1$ para que se tenha $r - r\frac{p^n}{p^n - 1} \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Exercício nº35

1. Por hipótese, $b \in B(a,r)$, ou seja, $d(a,b) < r$. Basta então provar que $B(a,r) \subset B(b,r)$; por simetria, a inclusão oposta ficará também demonstrada. Seja então $c \in B(a,r)$; pretende-se mostrar que $c \in B(b,r)$, ou seja, mostrar que $d(c,b) < r$. Mas $d(c,b) \leqslant \max\{d(c,a), d(a,b)\} < r$ pois $d(c,a) < r$ e $d(a,b) < r$.

2. Seja $c \in B(a,r)$; pretende-se demonstrar que $c \in B(b,s)$. Seja $x \in B(a,r) \cap B(b,s)$. Tem-se:

$$d(c,b) \leqslant \max\{d(c,x), d(x,b)\} \leqslant \max\{d(c,a), d(a,x), d(x,b)\}.$$

Mas $d(c,a) < r \leqslant s$, $d(a,x) < r \leqslant s$ e $d(x,b) < s$; deduz-se então que $d(c,b) < s$.

3. Sejam $a \in E$ e $r \in]0,+\infty[$; pretende-se demonstrar que $B(a,r)$ é um fechado de E, ou seja, que o conjunto $\{\, x \in E \mid d(x,a) \geqslant r \,\}$ é um aberto. Seja então $x \in E$ tal que $d(x,a) \geqslant r$. A bola $B(x,r)$ não intersecta $B(a,r)$ pois se a intersecção não fosse vazia deduzir-se-ia da alínea anterior que $B(a,r) = B(x,r)$, o que é absurdo porque $x \notin B(a,r)$.

Pretende-se agora demonstrar que $B'(a,r)$ é um aberto. Seja $x \in B'(a,r)$; vai-se mostrar que $B(x,r) \subset B'(a,r)$. De facto, se $y \in B(x,r)$, então $d(y,a) \leqslant \max\{d(y,x), d(x,a)\} \leqslant r$.

Exercício nº41 (relativamente ao exercício 32)

Observe-se que a topologia induzida pela métrica d_∞ é mais fina do que a topologia induzida pela métrica d_1. De facto, a função identidade de $(\mathcal{C}([0,1]), d_\infty)$ em $(\mathcal{C}([0,1]), d_1)$ é contínua, porque se $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$, então:

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f-g| \leqslant \int_0^1 \sup|f-g| = \sup|f-g| = d_\infty(f,g).$$

Logo, qualquer aberto (respectivamente fechado) de $(\mathcal{C}([0,1]), d_1)$ é um aberto (resp. fechado) de $(\mathcal{C}([0,1]), d_\infty)$. Deduz-se que se $A \subset \mathcal{C}([0,1])$, então a aderência de A relativamente a d_∞ está contida na aderência de A relativamente a d_1 e o interior de A relativamente a d_∞ contém o interior de A relativamente a d_1.

1. Seja $A = \{\, f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid f(0) = 0 \,\}$. Foi visto, no exercício 18, que a função

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \rightsquigarrow & f(0) \end{array} \tag{4}$$

é contínua relativamente à métrica d_∞; logo, o conjunto A é fechado (relativamente à métrica d_∞), pois é a imagem recíproca de $\{0\}$ pela função (4) e, portanto, é igual à sua aderência.

A aderência de A relativamente a d_1 é o espaço $\mathcal{C}([0,1])$. De facto, sejam $f \in \mathcal{C}([0,1])$ e $\varepsilon > 0$; quer-se mostrar que existe $g \in B(f,\varepsilon)$ tal que $g(0) = 0$. Seja $\varepsilon' \in]0,1]$ e seja

$$\begin{array}{rccl} g\colon & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & \begin{cases} f(\varepsilon')x/\varepsilon' & \text{se } x < \varepsilon' \\ f(x) & \text{caso contrário;} \end{cases} \end{array}$$

vejam-se os gráficos de f (a cheio) e de g (a tracejado) na figura 2. Então

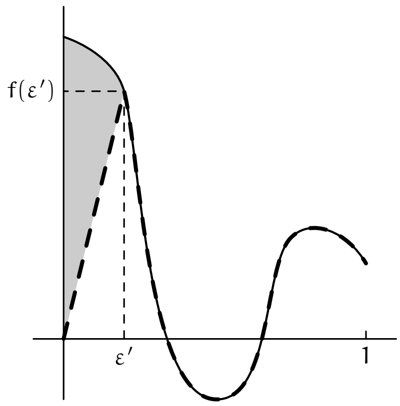

Figura 2

tem-se:

$$\begin{aligned} d_1(f,g) &= \int_0^1 |f-g| \\ &= \int_0^{\varepsilon'} |f-g| \text{ (pois } f(x) = g(x) \text{ se } x > \varepsilon'\text{)} \\ &\leqslant 2M\varepsilon'. \end{aligned}$$

sendo M o máximo de $|f|$. Basta então escolher $\varepsilon' < \varepsilon/(2M)$.

O interior de A relativamente a d_∞ é vazio. De facto, se $f \in \mathcal{C}([0,1])$ é tal que $f(0) = 0$ e se $\varepsilon > 0$, então a função $g \in \mathcal{C}([0,1])$ definida por $g(x) = f(x) + {}^{\varepsilon}/_2$ está na bola $B(f,\varepsilon)$, mas $g(0) \neq 0$. Deduz-se das observações feitas no início da resolução que o interior de A relativamente a d_1 também é vazio.

2. Seja $A = \{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid (\forall t \in [0,1]) : |f(t)| < 1 \}$. O conjunto A é, relativamente à métrica d_∞, a bola $B(0,1)$, sendo 0 a função nula. Logo, é aberto e, portanto, igual ao seu interior. Relativamente à métrica d_1, o conjunto A tem o interior vazio. Para o demonstrar, tome-se f tal que $(\forall t \in [0,1]) : |f(t)| < 1$ e tome-se $\varepsilon > 0$. Considere-se a função:

$$\begin{array}{rccc} h\colon & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & \begin{cases} 2 - {}^{4x}/_{\varepsilon} & \text{se } x < {}^{\varepsilon}/_{2} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{array}$$

Então $d_1(f, f+h) = {}^{\varepsilon}/_{2} < \varepsilon$ pelo que $f + h \in B(f, \varepsilon)$, mas $(f+h)(0) = f(0) + 2 > 1$, pelo que $f + h \notin A$.

Sejam A' a aderência de A relativamente à métrica d_1 e $A^\star$ a aderência relativamente à métrica d_∞. Sabe-se que

$$A^\star \subset \{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid (\forall t \in [0,1]) : |f(t)| \leqslant 1 \},$$

pois este último conjunto é, relativamente à métrica d_∞, a bola $B'(0,1)$ e, portanto, um fechado. De facto, este conjunto é igual a $A^\star$, pois se $(\forall t \in [0,1]) : |f(t)| \leqslant 1$ e se $\varepsilon > 0$, então a função

$$\begin{array}{rccc} g\colon & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & \begin{cases} f(x)(1 - {}^{\varepsilon}/_{2}) & \text{se } \varepsilon \leqslant 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{array}$$

pertence a A e $d_\infty(f, g) < \varepsilon$. Deduz-se então das observações feitas no início da resolução que $\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid (\forall t \in [0,1]) : |f(t)| \leqslant 1 \} \subset A'$. Finalmente, vai-se demonstrar que esta inclusão é uma igualdade. Seja $f \in \mathcal{C}([0,1]) \setminus \{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid (\forall t \in [0,1]) : |f(t)| \leqslant 1 \}$; pretende-se mostrar que $f \notin A'$. Existe algum $t \in [0,1]$ tal que $f(t) > 1$ ou que $f(t) < -1$. Vamos supor que estamos no primeiro caso; o outro caso é análogo. Seja

$$r = \int_0^1 \max\{f(t), 1\} - 1 \, dt$$

e seja $g \in B(f, r)$; pretende-se mostrar que $g \notin A$. De facto, se se tivesse $g \in A$, então, em particular, ter-se-ia $g(t) \leqslant 1$ para qualquer $t \in [0,1]$. Logo, para cada $t \in [0,1]$ ter-se-ia:

– se $f(t) > 1$, $|f(t) - g(t)| = f(t) - g(t) \geqslant f(t) - 1 = \max\{f(t), 1\} - 1$;

– se $f(t) \leqslant 1$, $\max\{f(t), 1\} - 1 = 0 \leqslant |f(t) - g(t)|$.

Em ambos os casos tem-se então $\max\{f(t), 1\} - 1 \leqslant |f(t) - g(t)|$, pelo que:

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f - g| \geqslant \int_0^1 \max\{f(t), 1\} - 1\,dt = r$$

o que é absurdo pois, por hipótese, $g \in B(f, r)$.

3. Seja $A = \{ f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid \int_0^1 f = 0 \}$. Relativamente à métrica d_1, A é fechado e, portanto, idêntico à sua aderência. De facto, se $f \in A^C$, então a bola $B\left(f, |\int_0^1 f|\right)$ não intersecta A, pois se $d_1(f, g) < \left|\int_0^1 f\right|$, então

$$\int_0^1 g = \int_0^1 (g - f) + \int_0^1 f; \tag{5}$$

mas

$$\left|\int_0^1 (g - f)\right| \leqslant \int_0^1 |g - f| < \int_0^1 f.$$

Visto que a relação (5) exprime $\int_0^1 g$ como a soma de dois números com valores absolutos distintos, este número não pode ser igual a 0. Deduz-se das observações feitas no início da resolução que A é fechado relativamente à métrica d_∞ e que, portanto, também neste caso é igual à sua aderência.

O interior de A relativamente à métrica d_∞ é vazio. Para ver isso, basta observar que se $f \in A$ e $\varepsilon > 0$ e se se definir $g \in B(f, \varepsilon)$ por $g(x) = f(x) + \varepsilon/2$, então $\int_0^1 g = \varepsilon/2$, pelo que $g \notin A$. Pelas observações feitas no início da resolução, sabe-se que o interior de A relativamente à métrica d_1 também é vazio.

Exercício nº42

Cada conjunto $M(I)$ é fechado por ser a intersecção de todos os conjuntos da forma

$$\{ f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid f(y) - f(x) \geqslant 0 \} \tag{6}$$

ou da forma

$$\{ f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid f(y) - f(x) \leqslant 0 \} \tag{7}$$

com $x, y \in I$ e $x < y$. Cada conjunto do tipo (6) (respectivamente (7)) é fechado por ser a imagem recíproca de $[0, +\infty[$ (resp. $]-\infty, 0]$) pela função contínua $F_{x,y} \colon \mathcal{C}([0, 1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F_{x,y}(f) = f(y) - f(x)$.

O interior de $M(I)$ é vazio, pois se $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ for crescente em I e se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, então, dado $a \in I$, seja $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x \in [0, 1]) : |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Seja $g \in \mathcal{C}([0,1])$ uma função que se anula fora de $]a-\delta, a+\delta[$, que toma o valor ε em a e que só toma valores entre 0 e ε nos restantes pontos do domínio. Seja $h = f - g$ (vejam-se, na figura figura 3, os gráficos das restrições a I de f e de h). Então $h|_I$ não é monótona, pois não é crescente ($h(a-\delta) = f(a-\delta) > f(a)-\varepsilon = h(a)$), nem decrescente ($h(a) < f(a) \leqslant f(a+\delta) = h(a+\delta)$), mas $d_\infty(f,h) = \varepsilon$, pelo que f não pertence ao interior de $M(I)$.

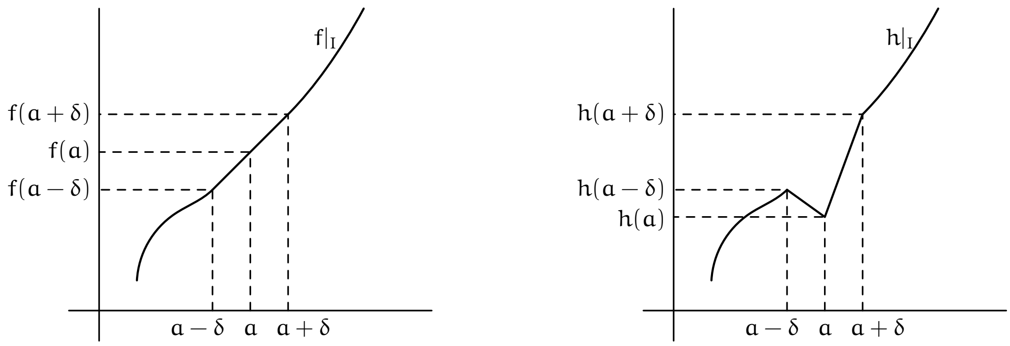

Figura 3

Analogamente, se $f \in \mathcal{C}([0,1])$ for decrescente, então f não pertence ao interior de $M(I)$.

Exercício nº48

Seja $a \in E_1$ e seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão que converge para a; quer-se prover que a sucessão $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f(a)$. Por hipótese, esta sucessão converge para algum $b \in E_2$. Considere-se a sucessão $a_1, a, a_2, a, a_3, a, \ldots$, que converge para a. Logo, a sucessão das suas imagens pela função f converge. Como a sub-sucessão dos termos de ordem par das imagens converge para $f(a)$ e a dos termos de ordem ímpar converge para b, $f(a) = b$.

Exercício nº49

1. Seja $(x_n, f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de pontos do gráfico e suponha-se que converge para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; vai-se mostrar que (x,y) também pertence ao gráfico, i. e. que $y = f(x)$. Tem-se $x = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$ e resulta então da continuidade de f que $f(x) = \lim_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) = y$.

2. Sim. Considere-se, por exemplo a função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & \begin{cases} 1/x & \text{caso } x \neq 0 \\ 0 & \text{caso } x = 0, \end{cases} \end{array}$$

cujo gráfico está representado na figura 4.

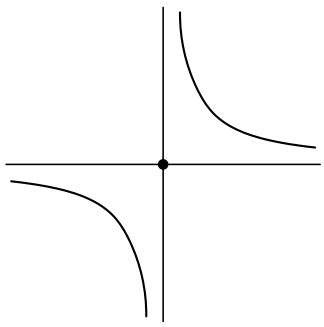

Figura 4

Exercício nº55

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy de um espaço métrico discreto (E, d). Então existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m, n \geqslant p \Longrightarrow d(a_m, a_n) < 1.$$

Mas afirmar que $d(a_m, a_n) < 1$ é o mesmo que afirmar que $a_m = a_n$. Posto de outro modo, se $n \geqslant p$, $a_n = a_p$. Logo, $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_p$.

Exercício nº58

1. Se $m, n \in \mathbb{N}$, então $d_1(f_m, f_n)$ é a área da região a sombreado da figura 5. Aquela região é formada por dois triângulos congruentes, pelo que a sua área é igual ao dobro da do triângulo de baixo. Este último tem por base o segmento que une $(1/2 - 1/2n, 0)$ a $(1/2 - 1/2m, 0)$, cujo comprimento é $|1/2n - 1/2m|$, e a altura é $1/2$. Logo, a área da região a sombreado é $|1/n - 1/m|/4$.

Então, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, se $p \in \mathbb{N}$ for tal que $1/p < 4\varepsilon$, tem-se, sempre $m, n \in \mathbb{N}$ forem tais que $m, n \geqslant p$:

$$d_1(f_m, f_n) = \frac{\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|}{4} \begin{cases} < \frac{1}{4n} \leqslant \frac{1}{4p} < \varepsilon & \text{se } m > n \\ = 0 < \varepsilon & \text{se } m = n \\ < \frac{1}{4m} \leqslant \frac{1}{4p} < \varepsilon & \text{se } m < n, \end{cases}$$

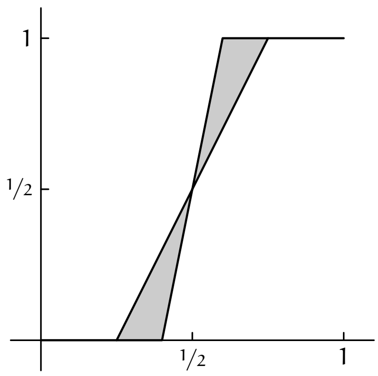

Figura 5

pelo que a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

2. Vai-se provar, por redução ao absurdo, que a sucessão da alínea anterior não converge. Suponha-se então que a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para uma função $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

Primeiro método: Vai-se provar que caso a sucessão da alínea anterior convergisse para uma função $f \in \mathcal{C}([0,1])$, então tinha-se necessariamente

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1/2 \\ 1 & \text{se } x > 1/2. \end{cases}$$

Como não há nenhuma função contínua de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ nestas condições, isto prova que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge.

Seja $a \in [0, 1/2[$ e seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Se $n \in \mathbb{N}$ for suficientemente grande, então $d_1(f,f_n) < \varepsilon$ e $1/2 - 1/2n > a$. Logo, para um tal n tem-se:

$$\begin{aligned} \left|\int_0^a f\right| &\leqslant \int_0^a |f| \\ &= \int_0^a |f - f_n| \text{ (pois } f_n \text{ anula-se em } [0,a]) \\ &\leqslant \int_0^1 |f - f_n| \\ &= d_1(f, f_n) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Como se tem $\left|\int_0^a f\right| < \varepsilon$ para cada $a \in [0, 1/2[$ e para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, a função

$$\begin{array}{ccc} [0, 1/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \rightsquigarrow & \int_0^a f \end{array}$$

é a função nula, pelo que a sua derivada também se anula. Mas a derivada é a restrição a $[0, 1/2[$ de f.

Analogamente, a função $f - 1$ anula-se em $]1/2, 1]$, ou seja $f(x) = 1$ sempre que $x > 1/2$.

Segundo método: Seja $R_-\colon \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1/2])$ a função definida por $R_-(f) = f|_{[0,1/2]}$; analogamente, seja $R_+\colon \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{C}([1/2,1])$ a função definida por $R_+(f) = f|_{[1/2,1]}$. Cada uma destas funções é contínua pois, se $g, h \in \mathcal{C}([0,1])$,

$$d_1(R_-(g), R_-(h)) = \int_0^{1/2} |g - h| \leqslant \int_0^1 |g - h| = d_1(g, h)$$

e, pelo mesmo argumento, $d_1(R_+(g), R_+(h)) \leqslant d_1(g, h)$; logo, basta tomar $\delta = \varepsilon$ na definição de continuidade. Então, pela proposição 1.4.5,

$$R_-(f) = R_-\left(\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n\right) = \lim_{n \in \mathbb{N}} R_-(f_n).$$

Mas $(\forall n \in \mathbb{N}) : d_1(R_-(f_n), 0) = \frac{1}{8n}$, pelo que $R_-(f) \equiv 0$. Pelo mesmo argumento, $R_+(f) \equiv 1$. Isto é absurdo, pois $f(1/2)$ não pode ser simultaneamente 0 e 1.

3. Primeira resolução: Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy em $(\mathcal{C}([0,1]), d_\infty)$; quer-se provar que converge. Visto que, por hipótese, se tem

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists p \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow \sup |f_m - f_n| < \varepsilon,$$

então, para cada $x \in [0,1]$ tem-se

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists p \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

ou seja, a sucessão $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy de números reais. Logo, converge para algum $f(x) \in \mathbb{R}$. Falta ver que $f \in \mathcal{C}([0,1])$ e que $\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$.

Sejam $a \in [0,1]$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; quer-se mostrar que existe algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x \in [0,1]) : |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow \sup |f_m - f_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então

$$(\forall x \in [0,1]) : |f(x) - f_p(x)| = \lim_{m \in \mathbb{N}} |f_m(x) - f_p(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Como f_p é contínua, existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x \in [0,1]) : |x-a| < \delta \Longrightarrow |f_p(x) - f_p(a)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Logo, se $x \in [0,1]$ for tal que $|x-a| < \delta$, então

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leqslant |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - f_p(a)| + |f_p(a) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, o argumento usando para demonstrar (8) pode ser usado para mostrar que, mais geralmente,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in [0,1]) : n \geqslant p \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

ou seja, que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geqslant p \Longrightarrow d_\infty(f, f_n) < \varepsilon.$$

Isto é afirmar que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para f.

Segunda resolução: O espaço métrico $(\mathcal{C}([0,1]), d_\infty)$ é um sub-espaço de $(\mathcal{F}_l([0,1]), d_\infty)$, que é um espaço métrico completo (exemplo 1.5.4). Logo, para mostrar que $(\mathcal{C}([0,1]), d_\infty)$ é completo basta, pela proposição 1.5.2, que se mostre que $\mathcal{C}([0,1])$ é um fechado de $(\mathcal{F}_l([0,1]), d_\infty)$. Mas isso foi visto no exemplo 1.3.11. Para além do método empregue neste exemplo, também é possível demonstrar directamente que $\mathcal{C}([0,1])$ é um fechado de $(\mathcal{F}_l([0,1]), d_\infty)$, i. e. que o seu complementar é um aberto de $(\mathcal{F}_l([0,1]), d_\infty)$. Para tal, seja $f \in \mathcal{F}_l([0,1])$ uma função descontínua. Então f é descontínua em algum $a \in [0,1]$, pelo que, para algum $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(\forall \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\exists x \in [0,1]) : |x-a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon.$$

Seja $g \in B(f, \varepsilon/3)$. Se $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, seja $x \in [0,1]$ tal que $|x-a| < \delta$ e que $|f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon$. Então, se se tivesse $|g(x) - g(a)| < \varepsilon/3$, tinha-se

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(a)| + |g(a) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

o que não se verifica. Logo, g também é descontínua em a. Está então provado que se $f \in \mathcal{C}([0,1])^\complement$, então existe alguma bola aberta centrada em f contida em $\mathcal{C}([0,1])^\complement$.

Exercício nº61

1. Basta aplicar o teorema do ponto fixo de Banach à função

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \rightsquigarrow & F(i,x) \end{array}$$

para cada $i \in I$.

2. Seja $i \in I$; quer-se mostrar que a função

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \rightsquigarrow & \phi_i \end{array}$$

é contínua. Se $j \in I$ tem-se:

$$\begin{aligned} d_E(\phi_i,\phi_j) &= d_E(F(i,\phi_i),F(j,\phi_j)) \\ &\leqslant d_E(F(i,\phi_i),F(j,\phi_i)) + d_E(F(j,\phi_i),F(j,\phi_j)) \\ &\leqslant d_E(F(i,\phi_i),F(j,\phi_i)) + K d_E(\phi_i,\phi_j), \end{aligned}$$

pelo que

$$d_E(\phi_i,\phi_j) \leqslant \frac{1}{1-K} d_E(F(i,\phi_i),F(j,\phi_i)). \tag{9}$$

Seja $\varepsilon > 0$. Como F é contínua em (i,ϕ_i), existe $\delta > 0$ tal que

$$d_{I\times E}((i,\phi_i),(j,\phi_k)) < \delta \Longrightarrow d_E(F(i,\phi_i),F(j,\phi_k)) < (1-K)\varepsilon.$$

Logo, se $d_I(i,j) < \delta$, tem-se $d_{I\times E}((i,\phi_i),(j,\phi_i)) < \delta$ e então

$$d_E(F(i,\phi_i),F(j,\phi_i)) < (1-K)\varepsilon.$$

Deduz-se então de (9) que $d_E(\phi_i,\phi_j) < \varepsilon$.

Exercício nº66

1. Se não existesse nenhuma função nas condições do enunciado, então tinha-se $\mathcal{C}([0,1]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M(I_n)$. Mas como, relativamente à métrica do supremo, cada $M(I_n)$ é um fechado com interior vazio e como $(\mathcal{C}([0,1],d_\infty)$ é completo (terceira alínea do exercício 58), a reunião dos conjuntos $M(I_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) tem interior vazio, pela versão do teorema de Baire enunciada na página 40; em particular, não pode ser igual a $\mathcal{C}([0,1])$.

2. Seja $f \in \mathcal{C}([0,1])$ uma função que não pertença a nenhum conjunto da forma $M(I_n)$ ($n \in \mathbb{N}$). Então f está nas condições do enunciado: se I for um intervalo de $[0,1]$ com mais do que um ponto, então $I \supset I_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Mas f não é monótona em I_n, pelo que não é monótona em I.

Capítulo 2

Exercício nº4

1. Pela definição de $\mathcal{T}$ sabe-se que $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$; falta então ver que $\mathcal{T}$ é estável para a reunião e para a intersecção finita.

Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma família de elementos de $\mathcal{T}$ e seja $A = \bigcup_{i\in I} A_i$; pretende-se mostrar que $A \in \mathcal{T}$. Se algum A_i for igual a $\mathbb{R}$, então $A = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$; pode-se pois supor que todos os A_i são diferentes de $\mathbb{R}$. Também se pode supor que todos os A_i são diferentes de $\emptyset$, pois caso contrário tem-se duas possibilidades.

- Qualquer A_i é vazio; então $A = \emptyset \in \mathcal{T}$.
- Existe algum $i \in I$ tal que $A_i \neq \emptyset$; seja $I' = \{\, i \in I \mid A_i \neq \emptyset \,\}$. É então claro que $A = \bigcup_{i\in I'} A_i$.

Está-se então a supor que cada A_i é da forma $]-\infty, a_i[$. Mas é então claro que $A =]-\infty, \sup\{\, a_i \mid i \in I \,\}[\in \mathcal{T}$.

Sejam agora $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$; pretende-se mostrar que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$. Mais uma vez, pode-se (e vai-se) supor que cada A_i ($i \in \{1, 2\}$) é da forma $]-\infty, a_i[$. É então claro que $A_1 \cap A_2 =]-\infty, \min\{a_1, a_2\}[\in \mathcal{T}$.

Nota: Pelo mesmo motivo atrás apresentado, dado um conjunto X e um conjunto $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$, se se pretender demonstrar que $\mathcal{T}$ é estável para a reunião e para a intersecção finita, pode-se sempre supor que se está a trabalhar com elementos de $\mathcal{T}$ distintos de $\emptyset$ e de X.

2. Se (E, d) é um espaço métrico e $x, y \in E$, há abertos que contêm x mas não contêm y; basta considerar, por exemplo, $B(x, d(x, y))$. Logo, se a topologia $\mathcal{T}$ fosse metrizável, então dados $x, y \in \mathbb{R}$ haveria algum $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A$ e $y \notin A$. Mas isto é falso: tome-se $x = 1$ e $y = 0$. É claro, pela definição de $\mathcal{T}$, que qualquer elemento de $\mathcal{T}$ que contém x também contém y.

3. Suponha-se, por redução ao absurdo, que a topologia $\mathcal{T}$ é pseudo-metrizável; existe então uma pseudo-métrica $\rho\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que os abertos correspondentes são os elementos de $\mathcal{T}$. Sabe-se, pela alínea anterior, que ρ não pode ser uma métrica, ou seja, que existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x \neq y$ e $\rho(x, y) = 0$. Então qualquer aberto A que contenha x contém y e reciprocamente. De facto, se $x \in A$, então existe algum $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$. Mas $y \in B(x, \varepsilon)$, pelo que $y \in A$. Isto é absurdo, pois se $x < y$, o aberto $]-\infty, y[$ contém x mas não contém y e se $y < x$, então o aberto $]-\infty, x[$ contém y mas não contém x.

Exercício nº6

1. Vai-se resolver o problema desta alínea recorrendo ao exercício 5. Quer-se então provar que $\mathcal{F} = \{\, V(I) \mid I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \,\}$ contém o conjunto vazio, contém $\mathbb{C}^n$ e é estável para reuniões finitas e para intersecções arbitrárias.

Tem-se $\emptyset \in \mathcal{F}$ porque $\emptyset = V(\{1\})$. Analogamente, $\mathbb{C}^n \in \mathcal{F}$ porque $\mathbb{C}^n = V(\{0\})$ (e também é igual a $V(\emptyset)$).

Se $(I_j)_{i \in I}$ for uma família de partes de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ então, para cada $w \in \mathbb{C}^n$, tem-se

$$\begin{aligned} w \in \bigcap_{j \in I} V(I_j) &\iff (\forall j \in I) : w \in V(I_j) \\ &\iff (\forall j \in I)(\forall P \in I_j) : P(w) = 0 \\ &\iff \left(\forall P \in \bigcup_{j \in I} I_j\right) : P(w) = 0, \end{aligned}$$

pelo que $\bigcap_{j \in I} V(I_j) = V\left(\bigcup_{j \in I} I_j\right)$.

Finalmente se $I_1, I_2, \dots, I_n \subset \mathbb{C}^n[x_1, \dots, x_n]$, seja $I = I_1.I_2 \dots I_n$; posto de outro modo, I é o conjunto dos polinómios $P \in \mathbb{C}^n[x_1, \dots, x_n]$ que são da forma $\prod_{k=1}^n P_k$, com, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $P_k \in I_k$. Então, se $w \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned} w \in \bigcup_{k=1}^n V(I_k) &\iff (\exists k \in \{1, 2, \dots, n\}) : w \in V(I_k) \\ &\iff (\exists k \in \{1, 2, \dots, n\})(\forall P \in I_k) : P(w) = 0 \qquad (10) \\ &\implies (\forall P \in I) : P(w) = 0. \end{aligned}$$

Esta última implicação é uma equivalência, pois se não se tiver (10), então, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, existe algum $P_k \in I_k$ tal que $P_k(w) \neq 0$, de onde resulta que $P_1.P_2 \dots P_n (\in I)$ não se anula em w. Está então provado que $\bigcup_{k=1}^n V(I_k) = V(I)$.

2. A afirmação que se pretende demonstrar equivale a esta: os conjuntos da forma $V(I)$ ($I \subset \mathbb{C}[x]$) são $\mathbb{C}$ e as partes finitas de $\mathbb{C}$.

Se $I \subset \mathbb{C}[x]$ então $I \subset \{0\}$ ou I contém algum $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ não nulo. No primeiro caso, $V(I) = \mathbb{C}$ e, no segundo, $V(I) \subset \{\text{zeros de } P(x)\}$. Este último conjunto é finito, pelo que $V(I)$ também é finito.

Reciprocamente, seja $F \subset \mathbb{C}$ um conjunto que seja igual a $\mathbb{C}$ ou que seja finito. No primeiro caso, $F = V(\{0\})$ e, no segundo, se $F = \{z_1, \dots, z_n\}$, então $F = V\left(\{\prod_{k=1}^n (z - z_k)\}\right)$.

3. Se F é um fechado de $(\mathbb{C}^n, \mathcal{T})$ então, para algum $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$,

$$F = V(I) = \bigcap_{P \in I} \{\text{zeros de } P\} = \bigcap_{P \in I} P^{-1}(\{0\}).$$

Isto exprime F como uma intersecção de fechados de $\mathbb{C}^n$ relativamente à topologia usual (pois as funções polinomiais de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}$ são contínuas para a topologia usual), pelo que F é um fechado de $\mathbb{C}^n$ relativamente à topologia usual.

Exercício nº8

Seja $\mathcal{T}$ a topologia gerada por $\mathcal{B}$. Visto que $\mathcal{T}$ é uma topologia, sabe-se que $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$ e, por outro lado, $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. No entanto, $\{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \mathcal{B}$ não é uma topologia; de facto, se $a \in \mathbb{R}$, então

$$]-\infty, a[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-\infty, a - 1/n],$$

ou seja, $]-\infty, a[$, que não é um elemento de $\mathcal{B} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, é reunião de elementos de $\mathcal{B} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Deduz-se que os conjuntos da forma $]-\infty, a[$ pertencem a $\mathcal{T}$. Verifica-se facilmente que

$$\mathcal{B} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{\,]-\infty, a[\mid a \in \mathbb{R} \,\}$$

é uma topologia. Trata-se então necessariamente da topologia gerada por $\mathcal{B}$.

Exercício nº15

1. Seja $\mathcal{V} = \{\, V_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ um conjunto numerável de vizinhanças de um ponto a de $\mathbb{R}$; vai-se mostrar que não é um sistema fundamental de vizinhanças, i. e. vai-se mostrar que existe alguma vizinhança de a que não contém nenhum elemento de $\mathcal{V}$. Por definição de vizinhança, cada $V_n \in \mathcal{V}$ contém algum aberto A_n do qual a é um elemento. Em particular, $A_n \neq \emptyset$, pelo que o conjunto $\mathbb{R} \setminus A_n$ é finito e, por maioria de razão, $\mathbb{R} \setminus V_n$ é finito. Logo, o conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus V_n)$ é finito ou numerável; em particular, não é igual a $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Mas

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus V_n) \neq \mathbb{R} \setminus \{a\} &\iff \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \mathbb{R} \setminus \{a\} \\ &\iff \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \{a\}. \end{aligned}$$

Existe então algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq a$ e que pertence a todos os elementos de $\mathcal{V}$. O conjunto $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ é então uma vizinhança de a que não contém nenhum elemento de $\mathcal{V}$.

2. Se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ fosse metrizável, então seria 1-numerável, pela proposição 2.2.3.

Exercício nº17

Nas cinco primeiras alíneas, apenas serão demonstrados os resultados referentes à topologia $\mathcal{T}_e$; as demonstrações são análogas no caso da topologia $\mathcal{T}_d$.

1. Seja $a \in \mathbb{R}$ e seja

$$\mathcal{V}_a = \{\, V \subset \mathbb{R} \mid (\exists b \in]-\infty, a[) :]b, a] \subset V \,\}.$$

Vejamos que estes conjuntos satisfazem as condições do teorema 2.2.1. Isto é trivial para as três primeiras condições. Quanto à quarta, basta tomar $W =]b, a]$ para algum $b \in]-\infty, a[$ tal que $]b, a] \subset V$. Então, para cada $w \in W$, $]b, a] \in \mathcal{V}_w$, visto que $]b, w] \subset W$.

2. Pelo que foi visto na alínea anterior e pelo teorema 2.2.1 tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_e &= \{\, A \subset \mathbb{R} \mid (\forall a \in A) : A \in \mathcal{V}_a \,\}\\ &= \{\, A \subset \mathbb{R} \mid (\forall a \in A)(\exists b \in]-\infty, a[) :]b, a] \subset A \,\}.\end{aligned}$$

Logo, os intervalos da forma $]b, a]$ pertencem a $\mathcal{T}_e$.

3. Seja $A \in \mathcal{T}$. Então para cada $a \in A$ existe algum $\varepsilon > 0$ tal que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset A$. Em particular, $]a-\varepsilon, a] \subset A$ e, portanto, A é vizinhança de a relativamente à topologia $\mathcal{T}_e$. Como A é vizinhança de todos os seus pontos, $A \in \mathcal{T}_e$.

4. O conjunto $]-\infty, 0]$ é aberto e fechado para a topologia $\mathcal{T}_e$. Que é aberto resulta do facto de que, para cada $a \in]-\infty, 0]$, $]a-1, a] \subset]-\infty, 0]$. Que é fechado resulta do facto de que, para cada $a \in]0, +\infty[$, $]0, a] \subset]0, +\infty[$.

5. Considere-se

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\rightsquigarrow \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0\\ 1 & \text{caso contrário.}\end{cases}\end{aligned}$$

Esta função é descontínua como função de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Para ver que é contínua se entendida como função de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, basta ver que é contínua em cada $x \in \mathbb{R}$. Se V for uma vizinhança de $f(x)$, então $f^{-1}(V)$ só pode ser igual a $]-\infty, 0]$, a $]0, +\infty[$ ou a $\mathbb{R}$. Todos estes conjuntos são elementos de $\mathcal{T}_e$, pelo que f é contínua.

6a. O exemplo anterior também serve neste caso.

6b. Basta tomar $f(x) = -x$. O conjunto $]0, 1]$ pertence a $\mathcal{T}_e$, mas $f^{-1}(]0, 1]) = [-1, 0[$ e este conjunto não pertence a $\mathcal{T}_e$, pois não é vizinhança de -1.

7. A topologia mais fina contida simultaneamente em $\mathcal{T}_e$ e em $\mathcal{T}_d$ é a topologia usual $\mathcal{T}$. Por um lado, já foi visto que tanto $\mathcal{T}_e$ quanto $\mathcal{T}_d$ contêm $\mathcal{T}$. Por outro lado, se $A \in \mathcal{T}_e \cap \mathcal{T}_d$, então, para cada $a \in A$, existe $b < a$ tal que $]b, a] \subset A$ (pois $A \in \mathcal{T}_e$) e existe $c > a$ tal que $[a, c[\subset A$ (pois $A \in \mathcal{T}_d$); logo, $]b, c[\subset A$, pelo que A é vizinhança de a relativamente à topologia $\mathcal{T}$. Como A é vizinhança de todos os seus pontos, $A \in \mathcal{T}$.

A topologia menos fina que contém $\mathcal{T}_e$ e $\mathcal{T}_d$ é a topologia discreta, ou seja, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. De facto, seja $\mathcal{T}'$ uma topologia mais fina do que $\mathcal{T}_e$ e do que $\mathcal{T}_d$ e seja $a \in \mathbb{R}$. Visto que $\{a\} =]a-1, a] \cap [a, a+1[$, $\{a\} \in \mathcal{T}'$. Se $A \subset \mathbb{R}$, então $A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \in \mathcal{T}'$. Logo, $\mathcal{T}' = \mathcal{P}(X)$.

Exercício nº20

1. Suponha-se que f é contínua em $b \in \mathbb{R}$; pretende-se demonstrar que f é semi-contínua superiormente e inferiormente em b. Afirmar que f é semi-contínua superiormente em b significa que se V for uma vizinhança de $f(b)$ (relativamente à topologia do exercício 4), então $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de b. Visto que $V (\subset \mathbb{R})$ é uma vizinhança de $f(b)$ sse V contém algum intervalo da forma $]-\infty, a[$ com $a > f(b)$, então para mostrar que f é semi-contínua superiormente em b bastará mostrar que $f^{-1}(]-\infty, a[)$ é uma vizinhança de b quando $a > f(b)$. Mas isto é óbvio, pois f é contínua e $]-\infty, a[$ é um aberto para a topologia usual de $\mathbb{R}$. Mostra-se de maneira análoga que f é semi-contínua inferiormente.

Suponha-se agora que f é semi-contínua superiormente e inferiormente em $b \in \mathbb{R}$. Quer-se mostrar que f é contínua em b, ou seja, quer-se mostrar que, para cada vizinhança V de $f(b)$, $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de b. Se V for uma vizinhança de $f(b)$, existe algum $\varepsilon > 0$ tal que $V \supset]f(b) - \varepsilon, f(b) + \varepsilon[$. Então tem-se:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(V) &\supset f^{-1}(]f(b) - \varepsilon, f(b) + \varepsilon[) \\
&= f^{-1}(]-\infty, f(b) + \varepsilon[\cap]f(b) - \varepsilon, +\infty[) \\
&= f^{-1}(]-\infty, f(b) + \varepsilon[) \cap f^{-1}(]f(b) - \varepsilon, +\infty[).
\end{aligned}$$

Este conjunto é um aberto, pois é a intersecção de dois abertos, e contém b. Logo, é uma vizinhança de b, pelo que $f^{-1}(V)$ também o é.

2. Suponha-se que χ_A é uma função semi-contínua superiormente. Então, em particular, $\chi_A^{-1}(]-\infty,1[)$ é um aberto de $\mathbb{R}$. Mas

$$\chi_A^{-1}(]-\infty,1[=A^C.$$

pelo que A é fechado.

Suponha-se agora que A é fechado. Pretende-se mostrar que, para cada $a \in \mathbb{R}$, o conjunto $\chi_A^{-1}(]-\infty,a[)$ é um aberto de $\mathbb{R}$. Mas tem-se:

$$\chi_A^{-1}(]-\infty,a[)=\begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } a>1 \\ A^C & \text{se } 0<a\leqslant 1 \\ \emptyset & \text{se } a\leqslant 0 \end{cases}$$

e os conjuntos $\mathbb{R}$, A^C e $\emptyset$ são abertos de $\mathbb{R}$.

3. Tem-se:

$$\begin{aligned} & f \text{ semi-contínua superiormente} \iff \\ \iff & (\forall a \in \mathbb{R}) : f^{-1}(]-\infty,a[) \text{ é um aberto} \\ \iff & (\forall a \in \mathbb{R}) : (-f)^{-1}(]-a,+\infty[) \text{ é um aberto} \\ \iff & (\forall a \in \mathbb{R}) : (-f)^{-1}(]a,+\infty[) \text{ é um aberto} \\ \iff & -f \text{ semi-contínua inferiormente.} \end{aligned}$$

4. Suponha-se que, para cada $\lambda \in \Lambda$, f_λ é semi-contínua superiormente; pretende-se demonstrar que $\inf_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ é semi-contínua superiormente, ou seja, que, para cada $a \in \mathbb{R}$, $(\inf_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda)^{-1}(]-\infty,a[)$ é um aberto de $\mathbb{R}$. Observe-se que, para cada $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x \in \left(\inf_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda\right)^{-1}(]-\infty,a[) & \iff \inf_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x) < a \\ & \iff (\exists\lambda \in \Lambda) : f_\lambda(x) < a \end{aligned}$$

e, portanto, que se tem:

$$\left(\inf_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda\right)^{-1}(]-\infty,a[) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda^{-1}(]-\infty,a[).$$

Este conjunto é claramente um aberto.

Exercício nº24

Seja $x \in M$. Tem-se então $f(x)\,\mathcal{R}\,x$ (por ii.), mas

$$\begin{aligned} f(x)\,\mathcal{R}\,x &\Longrightarrow g(f(x))\,\mathcal{R}\,g(x) \text{ (por iii.)}\\ &\Longleftrightarrow \psi(x)\,\mathcal{R}\,g(x)\\ &\Longrightarrow g(\psi(x))\,\mathcal{R}\,g(g(x)) \text{ (por iii.)}\\ &\Longleftrightarrow g(\psi(x))\,\mathcal{R}\,g(x) \text{ (por i.)}\\ &\Longrightarrow f(g(\psi(x)))\,\mathcal{R}\,f(g(x)) \text{ (por iii.)}\\ &\Longleftrightarrow (\psi\circ\psi)(x)\,\mathcal{R}\,\psi(x). \end{aligned} \tag{11}$$

Por outro lado, tem-se $x\,\mathcal{R}\,g(x)$ (por ii.), mas

$$\begin{aligned} x\,\mathcal{R}\,g(x) &\Longrightarrow f(x)\,\mathcal{R}\,g(f(x)) \text{ (por iii.)}\\ &\Longleftrightarrow f(x)\,\mathcal{R}\,\psi(x)\\ &\Longrightarrow f(f(x))\,\mathcal{R}\,\psi(f(x)) \text{ (por iii.)}\\ &\Longleftrightarrow f(x)\,\mathcal{R}\,\psi(f(x)) \text{ (por i.).} \end{aligned}$$

Como isto acontece para cada $x \in M$ então, em particular, tem-se

$$f(g(x))\,\mathcal{R}\,\psi(f(g(x)))(\Longleftrightarrow \psi(x)\,\mathcal{R}\,(\psi\circ\psi)(x)) \tag{12}$$

para cada $x \in M$. Então, uma vez que $\mathcal{R}$ é anti-simétrica, deduz-se de (11) e de (12) que $\psi = \psi\circ\psi$. Mostra-se de maneira análoga que $\varphi = \varphi\circ\varphi$.

Se X é um espaço topológico, então sejam $M = \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{R}$ a relação «inclusão» e f e g as funções de M em M definidas por $f(A) = \mathring{A}$ e por $g(A) = \overline{A}$. Então $\mathcal{R}$, f e g satisfazem as condições da primeira parte do exercício.

Exercício nº28

1. Se $A \subset B$, então $\alpha(B) = \alpha(A \cup (B \setminus A)) = \alpha(A) \cup \alpha(B \setminus A) \supset \alpha(B)$.

2. Se $A \subset B$ e $B \in \mathcal{F}$, então, pela primeira alínea e pela definição de $\mathcal{F}$, $\alpha(A) \subset \alpha(B) = B$. Está então provado que, para qualquer $B \in \mathcal{F}$ que contenha A, $\alpha(A) \subset B$. Como $\alpha(A) \in \mathcal{F}$ (pois $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$) e como $\alpha(A) \supset A$, isto prova que $\alpha(A)$ é o menor elemento de $\mathcal{F}$ (relativamente à inclusão) que contém A.

3. Basta ver que $\mathcal{F}$ satisfaz as condições do exercício 5. Visto que por hipótese, $\alpha(\emptyset) = \emptyset$, é claro que $\emptyset \in \mathcal{F}$. Como $X \subset \alpha(X) \subset X$, tem-se que $\alpha(X) = X$ e, portanto, $X \in \mathcal{F}$. Se $(A_j)_{j\in J}$ for uma família de elementos de $\mathcal{F}$, então, para cada $i \in J$, $\bigcap_{j \in J} A_j \subset A_i$, pelo que

$$\alpha\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \subset \alpha(A_i) = A_i.$$

Como isto tem lugar para cada $i \in J$,

$$\alpha\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \subset \bigcap_{j \in J} A_j \tag{13}$$

e então, como a inclusão inversa tem sempre lugar, a inclusão (13) é, de facto, uma igualdade, ou seja, $\bigcap_{j \in J} A_j \in \mathcal{F}$. Finalmente, resulta da última condição do enunciado que se $n \in \mathbb{N}$ e se $A_1, \ldots, A_n \in X$, então

$$\alpha(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \alpha(A_1) \cup \cdots \cup \alpha(A_n).$$

Resulta desta igualdade que se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, então $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{F}$.

4. Se $A \subset X$ então, pela proposição 1.3.1, $\overline{A}$ é o menor elemento de $\mathcal{F}$ que contém A. Pela segunda alínea, o menor elemento de $\mathcal{F}$ que contém A é $\alpha(A)$.

Exercício nº34

1. Se f fosse um homeomorfismo, então, em particular, se V fosse uma vizinhança de 0, $f(V)$ seria uma vizinhança de $f(0) = (0,0)$. Considera-se a vizinhança $]-1,1[$ de 0. Se $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, então $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ é negativo e $\frac{2x}{x^2+1}$ tem o mesmo sinal que x, pelo que $f(x)$ está no quarto quadrante (se $x > 0$) ou no segundo (se $x < 0$). Por outro lado, tem-se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (0,0),$$

pelo qualquer vizinhança de $(0,0)$ possui elementos da forma $f(x)$ com $x > 1$. Mas se $x > 1$, então $f(x)$ pertence ao primeiro quadrante, pelo que $f(x) \notin f(]-1,1[)$; logo, $f(]-1,1[)$ não é uma vizinhança de $(0,0)$.

2. A função

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \setminus \{(0,1)\} \\ & x & \rightsquigarrow & \left(\dfrac{2x}{x^2-1}, \dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right) \end{array}$$

é um homeomorfismo cuja inversa é

$$\begin{array}{ccc} S^1 \setminus \{(0,1)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \rightsquigarrow & \dfrac{x}{1-y}. \end{array}$$

Deduz-se então que se $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ é tal que

$$(u,v) = f(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{2x}{x^2+1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

para algum $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $(u, {}^v\!/_u) = \varphi(x)$, pelo que

$$x = \frac{u}{1 - {}^v\!/_u} = \frac{u^2}{u-v}.$$

Isto mostra que a função inversa de $f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ é a função:

$$\begin{array}{ccc} L \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ (u,v) & \rightsquigarrow & \dfrac{u^2}{u-v}. \end{array}$$

Visto que esta função é claramente contínua, $f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ é um homeomorfismo.

3. Considere-se a função:

$$\begin{array}{cccc} h\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & \begin{cases} x^{-1} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

É claro que h é descontínua relativamente à topologia usual. Seja h_L a função $f \circ h \circ f^{-1}$; pretende-se mostrar que h_L é contínua. Se $(u,v) \in L$, então $(u,v) = f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}$, pelo que se tem, quando $(u,v) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned} h_L(u,v) &= f(h(x)) \\ &= f({}^1\!/_x) \\ &= \frac{{}^2\!/_x}{({}^1\!/_x)^2+1}\left(1, \frac{({}^1\!/_x)^2-1}{({}^1\!/_x)^2+1}\right) \\ &= \frac{2x}{x^2+1}\left(1, -\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \\ &= (u,-v). \end{aligned}$$

A igualdade $h_L(u,v) = (u,-v)$ é também válida quando $(u,v) = (0,0)$. Logo, h_L é contínua.

4. Considere-se a função:

$$\begin{array}{cccc} g\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & \min\{1, |x|\}. \end{array}$$

Esta função é claramente contínua relativamente à topologia usual. Afirmar que g é descontínua relativamente à topologia $\mathcal{T}$ é o mesmo que afirmar que

$$g_L = f \circ g \circ f^{-1} \colon L \longrightarrow L$$

é descontínua relativamente à topologia usual em L. Cálculos simples mostram que:

$$(\forall (u,v) \in L) : g_L(u,v) = \begin{cases} (u,v) & \text{se } u \geqslant 0 \text{ e } v \leqslant 0 \\ (-u,-v) & \text{se } u \leqslant 0 \text{ e } v \geqslant 0 \\ (1,0) & \text{nos restantes casos.} \end{cases}$$

Esta função é descontínua pois, por um lado, $g_L(0,0) = (0,0)$ e, por outro, lado qualquer vizinhança de $(0,0)$ contém pontos da forma (u,v) com $u, v > 0$, pontos estes que são enviados por g_L em $(1,0)$.

Exercício nº38

Se $\mathbb{Q}$ fosse topologicamente completo, resultaria do teorema de Baire que qualquer intersecção de uma família numerável de abertos densos de $\mathbb{Q}$ teria intersecção densa. Mas a família $(\mathbb{Q} \setminus \{q\})_{q \in \mathbb{Q}}$ é uma família numerável de abertos densos de $\mathbb{Q}$ com intersecção vazia.

Exercício nº47

Considere-se a função

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow \frac{x}{1+|x|}. \end{aligned}$$

Pela definição de d tem-se que $(\forall x, y \in \mathbb{R}) : d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ pelo que, se $I = f(\mathbb{R})$, f é uma bijecção de $(\mathbb{R}, d)$ em I (relativamente à topologia usual em I). É claro que $I \subset]-1,1[$, pois se $x \in \mathbb{R}$, então $|f(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1$. Por outro lado, se $y \in]-1,1[$, então $y = f\left(\frac{y}{1-|y|}\right)$. Isto mostra que $I =]-1,1[$ e que f é uma bijecção de $\mathbb{R}$ em $]-1,1[$ cuja inversa é

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon]-1,1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow \frac{x}{1-|x|}. \end{aligned}$$

Está então visto que f é uma isometria de $(\mathbb{R}, d)$ em $]-1,1[$. Como este último espaço não é completo, $(\mathbb{R}, d)$ também não é completo.

Para ver que a topologia induzida por d é a usual basta provar que a função $\mathrm{id}\colon \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}, d)$ é um homeomorfismo se se considerar no domínio a topologia usual. Visto que f é um homeomorfismo de $(\mathbb{R}, d)$ em $]-1,1[$, isto é o mesmo que provar que $f \circ \mathrm{id}$ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}$ em $]-1,1[$, ambos munidos da topologia usual. Mas isto é óbvio, pois f é contínua e f^{-1} também.

Exercício nº49

A condição (a) do enunciado significa que, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(\exists p \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon, \tag{14}$$

enquanto que a condição (b) significa que, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \left|\frac{m}{1+m} - \frac{n}{1+n}\right| < \delta \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon. \tag{15}$$

Logo, basta provar que, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, as condições (14) e (15) são equivalentes. Seja então $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Convém observar que a sucessão $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e converge para 1.

Se se tiver (14), ou seja, se existir algum $p \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geqslant p \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$, seja

$$\delta = \inf\left\{ \left|\frac{m}{m+1} - \frac{n}{n+1}\right| \;\middle|\; m \neq n \wedge (m < p \vee n < p) \right\}.$$

Como a sucessão $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente,

$$\delta = \frac{p}{p+1} - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p^2+p} \neq 0.$$

Se $m, n \in \mathbb{N}$ forem tais que $\left|\frac{m}{m+1} - \frac{n}{n+1}\right| < \delta$ então, pela definição de δ, $m = n$ ou $m, n \geqslant p$. Em qualquer dos casos, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Se se tiver (15), ou seja, se existir algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que, para cada $m, n \in \mathbb{N}$, se $\left|\frac{m}{m+1} - \frac{n}{n+1}\right| < \delta$, então $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $1 - \delta < \frac{p}{p+1}$. Se $m, n \in \mathbb{N}$ forem tais que $m, n \geqslant p$, então os números $\frac{m}{m+1}$ e $\frac{n}{n+1}$ estão em $\left[\frac{p}{p+1}, 1\right[\subset]1-\delta, 1[$. Logo, $\left|\frac{m}{m+1} - \frac{n}{n+1}\right| < \delta$ e, portanto, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Exercício nº53

Vai-se mostrar que o complementar do gráfico de f, ou seja, o conjunto $A = \left\{ (x,y) \in E^2 \,\middle|\, y \neq f(x) \right\}$ é um aberto de E^2. Seja $(x,y) \in A$; vai-se mostrar que A é vizinhança de (x,y). Resultará daqui que A é aberto, pois é vizinhança de todos os seus pontos.

Como $(x,y) \in A$, $y \neq f(x)$. Logo, como E é separado, existem abertos $A_{f(x)}$ e A_y de E tais que $f(x) \in A_{f(x)}$, $y \in A_y$ e $A_{f(x)} \cap A_y = \emptyset$. Seja $A_x = f^{-1}(A_{f(x)})$. Então $x \in A_x$ e, como f é contínua, A_x é um aberto de E, pelo que $A_x \times A_y$ é um aberto de E^2. Se $(z,w) \in A_x \times A_y$, então $w \neq f(z)$, pois $z \in A_x \Longrightarrow f(z) \in A_{f(x)}$ e então, como $w \in A_y$ e $A_{f(x)}$ e A_y não se intersectam, $w \neq f(z)$, ou seja, $(z,w) \in A$. Está então provado que A contém um aberto que contém (x,y), nomeadamente $A_x \times A_y$.

Exercício nº64

1. Sejam

$$\begin{aligned} Y_+ &= \{ (x, \operatorname{sen}(1/x)) \mid x \in]0,+\infty[\}; \\ Y_- &= \{ (x, \operatorname{sen}(1/x)) \mid x \in]-\infty,0[\}; \\ Y_0 &= \{ (0,y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1 \}. \end{aligned}$$

Vai-se mostrar que $Y_0 \subset \overline{Y_+}$. De facto, seja $(0,y) \in Y_0$. Sabe-se que a equação $\operatorname{sen}(x) = y$ possui alguma solução x_0 e que todos os números reais da forma $x_0 + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) são soluções da equação. Seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geqslant k \Rightarrow x_0 + 2n\pi > 0$; então a sucessão

$$\left(\frac{1}{x_0 + 2n\pi}, \operatorname{sen}(x_0 + 2n\pi) \right)_{n \geqslant k} = \left(\frac{1}{x_0 + 2n\pi}, y \right)_{n \geqslant k}$$

é uma sucessão de elementos de Y_+ que converge para $(0,y)$, pelo que $(0,y) \in \overline{Y_+}$. Deduz-se então que $Y_+ \subset Y_0 \cup Y_+ \subset \overline{Y_+}$, pelo que $Y_0 \cup Y_+$ é conexo, pela proposição 2.4.2. Analogamente, pode-se mostrar que $Y_0 \cup Y_-$ é conexo, pelo que Y é a reunião de dois conexos (nomeadamente, $Y_0 \cup Y_+$ e $Y_0 \cup Y_-$) cuja intersecção não é vazia, pelo que Y é conexo.

2. Nesta resolução, a única topologia que se vai considerar em subconjuntos de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2$ é a topologia usual.

Vai-se mostrar que Y_+, Y_0 e Y_- são componentes conexas por arcos de Y. Que cada um é conexo por arcos é óbvio, pois Y_0 é homeomorfo ao intervalo $[-1,1]$, a função

$$\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & Y_+ \\ x & \rightsquigarrow & (x, \operatorname{sen}(1/x)) \end{array}$$

é um homeomorfismo de $]0,+\infty[$ em Y_+ e de maneira análoga, $]-\infty,0[$ é homeomorfo a Y_-.

Vai-se agora mostrar que não existe nenhuma função contínua f de $[0,1]$ em Y tal que $f(0) \in Y_0$ e $f(1) \in Y_+$. Suponha-se, por redução ao absurdo, que uma tal função f existe. Seja $A = \{\, t \in [0,1] \mid f(t) \in Y_0 \,\}$ e seja $s = \sup A$; a definição de s faz sentido pois A não é vazio, visto que $0 \in A$. É claro que $s \in [0,1]$ e que $s \in \overline{A}$; mas então, visto que $f(A) \subset Y_0$, $f(s) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{Y_0} = Y_0$, pois Y_0 é fechado. Deduz-se da definição de s que $f(]s,1]) \cap Y_0 = \emptyset$; de facto, $f(]s,1]) \subset Y_+$, pois que $f(1) \in Y_+$ e $f(]s,1])$ é uma parte conexa de $Y_+ \cup Y_-$. Seja agora V uma vizinhança de $f(s)$ que não contenha nenhum ponto de $\mathbb{R}^2$ da forma $(x,1)$ (naturalmente, não será possível encontrar uma tal vizinhança se $f(s) = (0,1)$, mas nesse caso bastará considerar uma vizinhança de $f(s)$ que não contenha nenhum ponto de $\mathbb{R}^2$ da forma $(x,-1)$ e proceder de maneira análoga). Visto que f é contínua em s, existe algum intervalo aberto U tal que $s \in U \subset [0,1]$ e tal que $f(U) \subset V$. Seja $t \in]s,1] \cap U$; então $f(t) = (x, \operatorname{sen}(1/x))$ para algum $x \in]0,+\infty[$. Seja $y \in]0,x[$ tal que $\operatorname{sen}(1/y) = 1$. Sabe-se que $(y, \operatorname{sen}(1/y)) \notin V$, pelo que $f(U)$ contém pelo menos um elemento de Y com primeira coordenada nula (por exemplo, $f(s)$) e pelo menos um elemento de Y com primeira coordenada maior do que y (por exemplo, $f(t)$), mas não contém nenhum elemento cuja primeira coordenada seja igual a y. Logo $f(U)$ não é conexo, o que é absurdo, pois U é conexo e f é contínua.

Pode-se mostrar de maneira análoga que não existe nenhuma função contínua $f\colon [0,1] \longrightarrow Y$ tal que $f(0) \in Y_0$ e $f(1) \in Y_+$. Finalmente, se existisse alguma função $f\colon [0,1] \longrightarrow Y$ contínua tal que $f(0) \in Y_-$ e $f(1) \in Y_+$, então, pelo teorema dos valores intermédios, existiria algum $t_0 \in]0,1[$ tal que a primeira coordenada de $f(t_0)$ seria nula, pelo que se teria $f(t_0) \in Y_0$. Mas então a função

$$\begin{array}{rccc} g\colon & [0,1] & \longrightarrow & Y \\ & t & \rightsquigarrow & f(t_0 + t(1-t_0)) \end{array}$$

seria contínua e ter-se-ia $g(0) = f(t_0) \in Y_0$ e $g(1) = f(1) \in Y_+$, o que é absurdo, conforme já foi visto.

Exercício nº73 (alíneas 1., 2., 3. e 4.)

1. Se A for um aberto de E, então $A \setminus \{\infty\}$ é um aberto de E pois é igual a A. Caso contrário, $E \setminus (A \setminus \{\infty\}) = A^\complement$, que é compacto e, portanto, uma vez que E é separado, é um fechado de E, pela proposição 2.5.2. Logo, $A \setminus \{\infty\})$ é um aberto de E.

2. É claro que $\emptyset \in \mathcal{T}$ (pois $\emptyset \subset E$ e é um aberto de E) e que $\overline{E} \in \mathcal{T}$ (pois $\infty \in \overline{E}$ e $\overline{E}^{\complement} = \emptyset$, que é um compacto).

Se $(A_j)_{j\in I}$ for uma família de elementos de $\mathcal{T}$, quer-se provar que $\bigcup_{j\in I} \in \mathcal{T}$. Caso ∞ não pertença a nenhum A_j ($j \in I$), então tem-se uma família de abertos de E e, portanto, a sua reunião é um aberto de E, pelo que pertence a $\mathcal{T}$. Caso contrário, seja $i \in I$ tal que $\infty \in A_i$. Então $\infty \in \bigcup_{j\in I} A_j$ e, por outro lado, $A_i^{\complement}$ é um compacto de E. Mas então

$$\left(\bigcup_{j\in I} A_j\right)^{\complement} = \bigcap_{j\in I} A_j^{\complement} \subset A_i^{\complement}.$$

Como $\infty \notin A_i^{\complement}$, $\bigcap_{j\in I} A_j^{\complement} = \bigcap_{j\in I}\left(A_j^{\complement} \setminus \{\infty\}\right)$. Mas cada conjunto do tipo $A_j^{\complement} \setminus \{\infty\}$ ($j \in I$) é um fechado de E, pois $E \setminus (A_j^{\complement} \setminus \{\infty\}) = A_j \setminus \{\infty\}$ e, pela primeira alínea, $A_j^{\complement} \setminus \{\infty\}$ é um aberto de E. Logo, $\bigcap_{j\in I}\left(A_j^{\complement} \setminus \{\infty\}\right)$ é um fechado do compacto $A_i^{\complement}$ e, portanto, é compacto, pela proposição 2.5.1. Está então provado que o conjunto $\bigcup_{j\in I} A_j$ contém ∞ e que o seu complementar é compacto, pelo que pertence a $\mathcal{T}$.

Finalmente, seja $(A_j)_{j\in I}$ uma família finita de elementos de $\mathcal{T}$; quer-se mostrar que $\bigcap_{j\in I} A_j \in \mathcal{T}$. Se ∞ pertencer a todos os A_j ($j \in I$), então também pertence à intersecção e

$$\left(\bigcap_{j\in I} A_j\right)^{\complement} = \bigcup_{j\in I} A_j^{\complement}.$$

Como cada $A_j^{\complement}$ ($j \in I$) é compacto e I é finito, a reunião anterior é compacta, pelo exercício 70. Logo, pertence a $\mathcal{T}$. Caso ∞ não pertença a A_i, para algum $i \in I$, então ∞ não pertence à intersecção e

$$\bigcap_{j\in I} A_j = \bigcap_{j\in I} (A_j \setminus \{\infty\}). \tag{16}$$

Pela primeira alínea, cada conjunto da forma $A_j \setminus \{\infty\}$ ($j \in I$) é um aberto de E. Portanto, o membro da direita de (16) é um aberto de E, por I ser finito.

3. Quer-se provar que, se $A \subset E$, então A é um aberto de E se e só se $A = A^\star \cap E$ para algum $A^\star \in \mathcal{T}$. Caso A seja um aberto de E, basta tomar $A^\star = A$. Reciprocamente, seja $A^\star \in \mathcal{T}$. Então $A^\star \cap E = A \setminus \{\infty\}$ e já foi visto que $A \setminus \{\infty\}$ é um aberto de E.

4. Primeira resolução: Seja $(A_j)_{j\in I}$ uma cobertura aberta de $\overline{E}$; quer-se mostrar que tem alguma sub-cobertura finita. Existe algum

$i_0 \in I$ tal que $\infty \in A_i$ e então $A_i^\complement$ é compacto. Como $A_i^\complement \subset \overline{E} = \bigcup_{j\in I} A_j$, $(A_i^\complement \cap A_j)_{j\in I}$ é uma cobertura aberta de $A_i^\complement$. Mas então, uma vez que $A_i^\complement$ é compacto, existe uma parte finita F de I tal que $A_i^\complement \subset \bigcup_{j\in F}(A_j \cap A_i^\complement)$ e, portanto,

$$\overline{E} = A_i \cup A_i^\complement = A_i \cup \bigcup_{j\in F} A_j = \bigcup_{j\in F\cup\{i\}} A_j.$$

Segunda resolução: Pode-se mostrar que $\overline{E}$ é compacto recorrendo à proposição 2.5.4. Seja então $\mathcal{F}$ uma família de partes não vazias de $\overline{E}$ tal que a intersecção de qualquer número finito de elementos de $\mathcal{F}$ contenha algum elemento de $\mathcal{F}$; quer-se mostrar que algum elemento de $\overline{E}$ adere a todos os elementos de $\mathcal{F}$.

Comece-se por supor que existe algum sub-espaço compacto K de E que contenha algum $F_0 \in \mathcal{F}$. Então seja $\mathcal{F}_K = \{F \cap K \mid F \in \mathcal{F}\}$. Se $F \in \mathcal{F}_K$ então $F \neq \emptyset$, pois $F = F^\star \cap K$, para algum $F^\star \in \mathcal{F}$, $F^\star \cap K \supset F^\star \cap F_0$ e este último conjunto não é vazio, pois contém algum elemento de $\mathcal{F}$. Por outro lado, se $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_K$ ($n \in \mathbb{N}$), então, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $F_j = F_j^\star \cap K$, para algum $F_j^\star \in \mathcal{F}$. Então

$$\bigcap_{j=1}^{n} F_j = \bigcap_{j=1}^{n} (F_j^\star \cap K) \supset \bigcap_{j=0}^{n} F_j$$

e este último conjunto é uma parte de K que contém algum elemento de $\mathcal{F}$; logo, contém algum elemento de $\mathcal{F}_K$. Sendo assim, visto que K é compacto, a proposição 2.5.4 garante que algum elemento de K adere a todos os elementos de $\mathcal{F}_K$; logo, adere a todos os elementos de $\mathcal{F}$.

Suponha-se agora que nenhum sub-espaço compacto de E contém um elemento de $\mathcal{F}$. Vai-se ver que, neste caso, ∞ adere todos os elementos de $\mathcal{F}$. Seja V uma vizinhança de ∞. Então V contém algum $A \in \mathcal{T}$ tal que $\infty \in A$, pelo que $A^\complement$ é um sub-espaço compacto de E. Por hipótese, $A^\complement$ não contém nenhum elemento de $\mathcal{F}$, pelo que A intersecta todos os elementos de $\mathcal{F}$ e, por maioria de razão, V intersecta todos os elementos de $\mathcal{F}$, o que é o mesmo que dizer que ∞ adere a todos os elementos de $\mathcal{F}$.

Exercício nº76

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão de elementos de E definida na sugestão. Se $m, n \in \mathbb{N}$ e $m \neq n$, então tem-se, para cada $k \in \mathbb{N}$, que

$$|x(m)_k - x(n)_k| = \begin{cases} 1 & \text{se } k = m \text{ ou } k = n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

pelo que $d(x(m), x(n)) = 1$. Sendo assim, nenhuma sub-sucessão de $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ pode ser de Cauchy, pelo que $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ não tem sub-sucessões convergentes. Logo, (E, d_∞) não é compacto, pelo teorema 2.5.5.

Exercício nº80

(a) $\Rightarrow$ (b) Seja ι uma função que preserva as distâncias de (E, d) num espaço métrico completo (F, d'). Como ι preserva as distâncias e L é totalmente limitado, $\iota(L)$ também é totalmente limitado. Seja $K = \overline{\iota(L)}$. Então K é totalmente limitado. Como também é fechado e (F, d') é completo, K é completo. Visto que K também é totalmente limitado, é compacto.

(b) $\Rightarrow$ (a) Se existir uma isometria f naquelas condições, então $\overline{f(L)}$ é totalmente limitada, pois é compacta. Logo, $f(L)$ é totalmente limitado, por ser um subconjunto do anterior. Como f preserva as distâncias, L também é totalmente limitado.

Capítulo 3

Exercício nº6

Quem examinar a demonstração do teorema de Stone-Weierstrass apercebe-se de que a única passagem onde poderá ser necessário usar a condição do enunciado com λ real mas não necessariamente racional é a passagem na qual se usa implicitamente que se f pertence a uma álgebra de funções $\mathcal{F}$ e P é uma função polinomial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, então $P \circ f$ também pertence a $\mathcal{F}$. No entanto, as funções polinomiais que surgem no decorrer da demonstração são as que resultam de se aplicar o teorema de Weierstrass a uma restrição da função módulo. Mas sabe-se, pela terceira alínea do exercício 43 do capítulo 1, que o teorema de Weierstrass continua válido se se considerarem apenas os polinómios com coeficientes racionais.